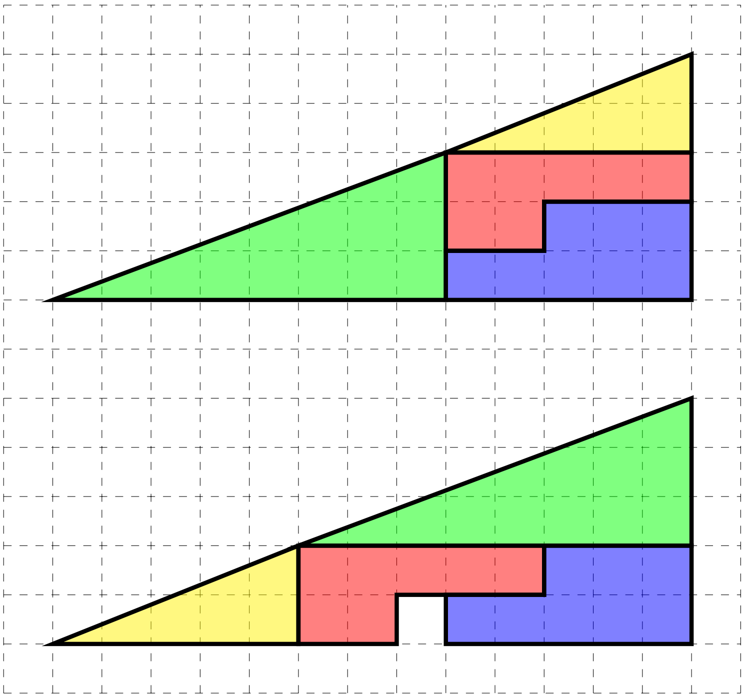
Folge 21 – Das fehlende Quadrat (Lösung)

M. Kottmann, H. Mathis, OST Ostschweizer Fachhochschule, Rapperswil, 13. April 2024

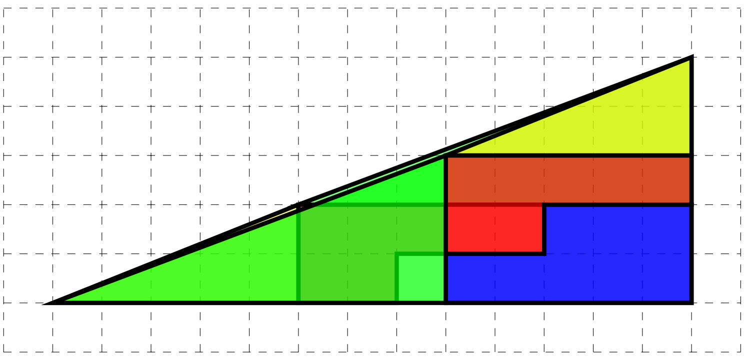
Unsere Frage war diesmal: Wohin ist das fehlende Quadrat in der unteren Zusammensetzung derselben vier farbigen Flächen entschwunden?



Nicht genau die Formen des klassischen japanischen Brettspiels Tangram, aber man könnte immerhin solche Teile fertigen und dann beide Zusammensetzungen legen, aber das bringt einen nicht wirklich weiter. Auch die Betrachtung des Gittersystems selbst zeigt einem nur, dass die Formen gleicher Farbe identisch sind.

Aber das obere 'Dreieck' ist in Wahrheit ein Viereck, mit einer Einbuchtung an der Stelle, wo sich die grüne und die gelbe Fläche berühren. Die Steigung beim grünen Dreieck ist $\frac{3}{8} = 0.375$, wogegen diejenige beim gelben Dreieck steiler ist: $\frac{2}{5} = 0.4$. Ohne Einbuchtung wäre die Fläche beim oberen Dreieck $\frac{13 \cdot 5}{2} = 32.5$; die vier Teilflächen addieren sich aber nur zu 32.

Legt man die beiden Zusammensetzungen übereinander, so sieht man auf der Diagonalen den Unterschied zwischen der Zusammensetzung mit Einbuchtung (konkave Form) und mit Ausbuchtung (konvexe Form) deutlich: die Differenzfläche entlang der Diagonalen hat exakt die Fläche eines Planquadrats:



Bemerkung (1):
Das Dreieck (das man zu sehen meint), hat eine Fläche von 32.5 und — gemäss Pythagoras — eine Hypothenuse mit der Länge

$$h_{\text{tot}} = \sqrt{13^2 + 5^2} = \sqrt{194} = 13.9284,$$

Beim Ein- und Ausbeulen ändert sich die Fläche relativ stark zu 33 bzw. 32, also etwa 1.5%.
Betrachtet man dagegen die Längen der Hypothenusen für das grüne und das gelbe Dreieck

$$h_{\text{grün}} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} = 8.5440 \qquad h_{\text{gelb}} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} = 5.3852$$

so ergibt deren Summe mit $h_{\text{grün}} + h_{\text{gelb}} = 13.9292$ einen Wert, der nur unwesentlich von h_{tot} abweicht.

Bemerkung (2):
Die Irritation beim Flächenvergleich entsteht offenbar dadurch, dass zwei sehr ähnliche Steigungen, aber eben nur **ähnliche** Steigungen verwendet werden: $0.375 = \frac{3}{8} \neq \frac{2}{5} = 0.4$. Numerisch können dazu naürlich irgendwelche geeignete Zahlen verwendet werden.

Interessanterweise sind in diesem Beispiel aber die Zahlen $\{2, 3, 5, 8\}$ benutzt worden, also 4 aufeinander folgende Zahlen aus der sogenannten Fibonacci-Folge $f = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...\}$. Diese Folge wird gebildet durch die ersten beiden Zahlen $f_0 = 1$ und $f_1 = 1$ sowie die Regel, dass jede weitere Zahl die Summe der beiden vorhergehenden Zahlen ist: $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$.

Die Fibonacci-Zahlen drängen sich durch ihre Eigenschaften für dieses Rätsel gewissermassen auf :-)

- Das Verhältnis aufeinanderfolgender Zahlen $\frac{f_k}{f_{k+1}}$
  z.B. $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{2}{3} = 0.\bar{6}$, $\frac{3}{5} = 0.6, \ldots,$ $\frac{55}{89} = 0.617977528089$ etc.
  konvergiert für grosse Werte gegen $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803398874...$
- Die im Rätsel auftretenden Steigungen sind die Werte $\frac{f_k}{f_k+2}$,
  die entsprechend gegen $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.381966011250...$ konvergieren.
- Die Differenz zwischen den Produkten $f_k \cdot f_{k+3}$ und $f_{k+1} \cdot f_{k+2}$ ist immer ± 1.
  Dies entspricht im Beispiel den Rechteckflächen rechts unten, mit $2 \cdot 8 = 16$ bzw. $3 \cdot 5 = 15$.
  Bei einem grosszügigeren Hüslipapier wäre $55 \cdot 233 = 12815$ und $89 \cdot 144 = 12816$.